直交多項式の有限フーリエ変換と超幾何多項式の漸近挙動

著者	中井 翔太郎
発行年	2018
URL	http://hdl.handle.net/10236/00027926

２０１８年度　修士論文要旨

直交多項式の有限フーリエ変換と超幾何多項式の漸近挙動

関西学院大学大学院理工学研究科

数理科学専攻　山根研究室　中井翔太郎

先行研究と主結果

定義 1. 超幾何多項式 ${}_3F_1$ は次の式で定義される.

$$
{}_3F_1\left[\begin{matrix}\alpha & \beta & \gamma \\ & \delta & \end{matrix};z\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\alpha]_n\,[\beta]_n\,[\gamma]_n}{[\delta]_n\,n!}z^n,\quad \delta\neq 0,-1,-2,\ldots
$$

ここで $[x]_0=1$, $[x]_n=x\,(x+1)\cdots(x+n-1)$ $(n\geq 1)$ である．${}_3F_1$ は一般には発散するが， α,β,γ の少なくとも 1 つが 0 以下の整数ならば有限和（多項式）になる.

曲線 C: $\left|\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)e^{-\frac{1}{z}-\frac{\sqrt{z^2+1}}{z}}\right|=1$ は $-i$ と i を結ぶ線分を含む.

[2] によれば, α が正整数のとき, C の外部のコンパクト部分集合上で $n\to\infty$ のとき

$$
\begin{aligned}
{}_3F_1\left[\begin{matrix}n & -n & \alpha \\ & \frac{1}{2} & \end{matrix};\frac{z}{2n}\right]&=\frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)}n^{\alpha-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{z}+\frac{\sqrt{z^2+1}}{z}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\sqrt{z^2+1}}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}\\
&\quad\times\left\{\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)e^{-\frac{1}{z}-\frac{\sqrt{z^2+1}}{z}}\right\}^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}
$$

C の内部のコンパクト部分集合上で $n\to\infty$ のとき

$$
{}_3F_1\left[\begin{matrix}n & -n & \alpha \\ & \frac{1}{2} & \end{matrix};\frac{z}{2n}\right]=\left(\frac{2}{n}\right)^{\alpha}\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{z}\right)^{\alpha}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).
$$

C を境目として漸近展開が切り替わるのだから，C 上での漸近展開を求めるのは難しい問題だと思われる．実際，[2] では C 上での展開には触れていない．我々は，いくつかの制約をつければ C 上での展開がある程度分かることを発見した．すなわち，

- C の一部（$-i$ と i を結ぶ線分から原点を除いた部分）で調べる
- $\alpha=1$ とする
- ${}_3F_1$ そのものではなく，$e^{-i\frac{n}{y}}{}_3F_1\left[\begin{matrix}n & -n & 1 \\ & \frac{1}{2} & \end{matrix};\frac{iy}{2n}\right]$ $(-1\leq y<0, 0<y\leq 1)$ の実部あるいは虚部 (n の偶奇によって場合分けする) を調べる

という設定で漸近展開を求めることが出来た.

定理 2. (中井) n が偶数の場合に限って $n\to\infty$ とすると

$$
\begin{aligned}
&2i\Im\left\{e^{-i\frac{n}{y}}{}_3F_1\left[\begin{matrix}n & -n & 1 \\ & \frac{1}{2} & \end{matrix};\frac{iy}{2n}\right]\right\}\\
&=\begin{cases}-in^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{2y\pi}}{\sqrt[4]{1-y^2}}\cos\left[n\left(-\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}-\arcsin y\right)+\frac{\pi}{4}\right]+o\left(n^{\frac{1}{2}}\right) & 0<y<1,\\ in^{\frac{2}{3}}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}\sqrt[3]{6}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{y2\sqrt{3}}+o\left(n^{\frac{2}{3}}\right) & y=1.\end{cases}
\end{aligned}
$$

なお，$-1\leq y<0$ の場合，あるいは n が奇数の場合についても類似の結果が得られる.

直交多項式の有限フーリエ変換

定義 3. ヤコビ多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ とチェビシェフ多項式 $T_n(x)$ はそれぞれ

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha+n}{k}\binom{\beta+n}{n-k}(x-1)^{n-k}(x+1)^k,$$
$$T_n(x) = \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_n}P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)$$

で定義される．チェビシェフ多項式は $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ と定義しても上の定義と一致する．

$S \coloneqq (-1)^{n+1}e^{-i\lambda}{}_3F_1\left[\begin{matrix} n & -n & 1 \\ & \frac{1}{2} & \end{matrix};-\frac{1}{2i\lambda}\right] + e^{i\lambda}{}_3F_1\left[\begin{matrix} n & -n & 1 \\ & \frac{1}{2} & \end{matrix};\frac{1}{2i\lambda}\right]$ とおく．$\lambda\in\mathbb{R}$ のとき

$$\begin{cases} S = 2i\Im\left\{e^{i\lambda}{}_3F_1\left[\begin{matrix} n & -n & 1 \\ & \frac{1}{2} & \end{matrix};\frac{1}{2i\lambda}\right]\right\} & (n \text{ が偶数のとき}), \\ S = 2\Re\left\{e^{i\lambda}{}_3F_1\left[\begin{matrix} n & -n & 1 \\ & \frac{1}{2} & \end{matrix};\frac{1}{2i\lambda}\right]\right\} & (n \text{ が奇数のとき}). \end{cases}$$

したがって, n が偶数のとき，$S|_{\lambda=-n/y}$ が定理 2 の左辺である．

定理 4. （[1], S のフーリエ積分表示）$S = i\lambda\int_{-1}^{1}e^{i\lambda x}T_n(x)\,dx$.

この定理 4 の式に $\lambda=-n/y$ を代入し，$x=\cos\theta$ と置換すると

$$S|_{\lambda=-n/y} = \frac{n}{iy}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left\{\exp\left[in\left(-\frac{\cos\theta}{y}+\theta\right)\right]+\exp\left[in\left(-\frac{\cos\theta}{y}-\theta\right)\right]\right\}\sin\theta\,d\theta$$

を得る．下の補題 5 により定理 2 は直ちにしたがう．

補題 5. (停留位相の方法) $\phi'(a)=\cdots=\phi^{(p-1)}(a)=0$, $\phi^{(p)}(a)\neq 0$ とする. また半開区間 $(a,b]$ 上の任意の点 t で $\phi'(t)\neq 0$, $f(t)$ は十分なめらかとする. $\mu=\mathrm{sgn}\phi^{(p)}(a)$ とおくと, $n\to\infty$ のとき

$$\int_a^b f(t)e^{in\phi(t)}dt \sim f(a)e^{in\phi(a)}\left(\frac{p!}{n|\phi^{(p)}(a)|}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{p}e^{\frac{i\pi}{2p}\mu} = \mathrm{const}.n^{-\frac{1}{p}}e^{in\phi(a)}.$$

References

[1] Atul Dixit, Lin Jiu, Victor H. Moll and Christophe Vignat, *The finite Fourier transform of classical polynomials*, *J. Aust. Math. Soc.* **98** (2015), 145-160

[2] Thorsten Neuschel, *Asymptotics for Menage polynomials and certain hypergeometric polynomials of type ${}_3F_1$*, *Journal of Approximation Theory* **164** (2012), 981-1006